

*Каримов Ш., Антонова А.,  
студенты 2 курса, профиль «Экономика и финансы»  
Финансовый университет при Правительстве РФ (Уфимский филиал),  
Россия, г. Уфа  
Научный руководитель: Федотова М.Ю.,  
кандидат физико-математических наук, доцент  
Финансовый университет при Правительстве РФ (Уфимский филиал),  
Россия, г. Уфа*

**КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА И ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ФИНАНСОВЫХ  
РИСКОВ: ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ VaR, CVaR И ПРОБЛЕМА  
«ТОЛСТЫХ ХВОСТОВ» (НА ПРИМЕРЕ ПАО «СБЕРБАНК»)**

***Аннотация:** Статья посвящена комплексному математическому исследованию финансовых рисков с использованием метрик Value-at-Risk (VaR) и Conditional Value-at-Risk (CVaR). Сформирована теоретическая база на основе функции плотности нормального распределения. Рассчитаны квантили риска для уровней доверия 90%, 95% и 99%. Проведен сравнительный анализ параметрического метода и эмпирических данных исторической волатильности ПАО «Сбербанк» за 2024–2025 гг. Обоснована проблема избыточного эксцесса («толстых хвостов») и необходимость перехода к метрике CVaR.*

***Ключевые слова:** теория вероятностей, нормальное распределение, финансовый риск, Value-at-Risk, CVaR, волатильность, эксцесс, Сбербанк.*

***Abstract:** The article is devoted to a comprehensive mathematical study of financial risks using the Value-at-Risk (VaR) and Conditional Value-at-Risk (CVaR) metrics. A theoretical basis is formed based on the normal distribution density function. Risk quantiles are calculated for confidence levels of 90%, 95%, and 99%. A comparative analysis of the parametric method and empirical data on the*

*historical volatility of Sberbank PJSC for 2024–2025 is carried out. The problem of excess kurtosis (fat tails) and the need to transition to the CVaR metric are substantiated.*

**Keywords:** *probability theory, normal distribution, financial risk, Value-at-Risk, CVaR, volatility, kurtosis, Sberbank.*

## **Введение**

В современных условиях макроэкономической турбулентности управление рыночными рисками требует строгого математического и статистического обоснования. Основой количественной оценки неопределенности выступает аппарат теории вероятностей. В фокусе данного исследования – перевод абстрактных стохастических уравнений в наглядные инструменты визуализации и анализа данных, позволяющие инвесторам определять количественные границы максимально возможных убытков.

Цель работы – формализовать процесс оценки рыночного риска с помощью функции плотности вероятности, рассчитать метрики VaR и CVaR для различных уровней доверия и сопоставить параметрическую модель с реальными историческими данными ПАО «Сбербанк» за 2024–2025 годы.

### **1. Математическая постановка задачи и теоретические основы**

Пусть случайная непрерывная величина  $X$  описывает логарифмическую доходность инвестиционного портфеля. В рамках параметрического подхода предполагается, что  $X$  подчиняется нормальному закону распределения с параметрами  $N(\mu, \sigma^2)$ , где  $\mu$  – математическое ожидание доходности, а  $\sigma$  – стандартное отклонение (волатильность).

Ключевой метрикой выступает Value-at-Risk (VaR). Математически VaR уровня доверия  $(1 - \alpha)$  определяется через функцию распределения как квантиль потерь:

$$P(X < -\text{VaR}) = \int_{-\infty}^{-\text{VaR}} f(x) dx = \alpha$$

где  $f(x)$  – функция плотности нормального распределения. Формула для вычисления абсолютного значения VaR портфеля имеет вид:

$$VaR = P0 \times (Z_{\alpha} \times \sigma - \mu)$$

где  $P0$  – стоимость портфеля,  $Z_{\alpha}$  – критическое значение (квантиль) стандартного нормального распределения.

Однако VaR не отвечает на вопрос о том, какова будет величина убытка, если критический порог всё-таки будет пробит. Для устранения этого недостатка вводится метрика Conditional Value-at-Risk (CVaR) – условное математическое ожидание убытков, превышающих VaR. Для нормального распределения аналитическое решение данного интеграла принимает вид:

$$CVaR = P0 \times (\varphi(Z_{\alpha}) / \alpha \times \sigma - \mu)$$

где  $\varphi(Z_{\alpha})$  – значение плотности стандартного нормального распределения в точке квантиля. Данный математический аппарат позволяет не только фиксировать границу риска, но и оценивать математическое ожидание хвоста распределения.

## 2. Параметрический расчет метрик риска и сравнительный анализ уровней доверия

Для практической реализации математического аппарата сформируем гипотетический инвестиционный портфель стоимостью ( $P0$ ) 100 млн рублей. Базовая дневная волатильность ( $\sigma$ ) актива составляет 2%. Математическое ожидание ( $\mu$ ) приравнивается к нулю, что является стандартным допущением в финансовой инженерии при расчете дневных рисков из-за доминирования стохастического шума над трендом.

В соответствии с методологией риск-менеджмента, проведем вычисления для трех ключевых уровней квантилей:  $\alpha = 0,10$  (уверенность 90%),  $\alpha = 0,05$  (уверенность 95%) и  $\alpha = 0,01$  (уверенность 99%). Результаты применения формулы VaR сведены в таблицу 1.

**Таблица 1.**

### Расчет метрики Value-at-Risk для различных уровней значимости ( $\alpha$ )

| Показатель                | $\alpha = 10\% (0,10)$ | $\alpha = 5\% (0,05)$ | $\alpha = 1\% (0,01)$ |
|---------------------------|------------------------|-----------------------|-----------------------|
| Доверительная вероятность | 90%                    | 95%                   | 99%                   |

|                        |        |        |        |
|------------------------|--------|--------|--------|
| Квантиль Гаусса<br>(Z) | –1,282 | –1,645 | –2,326 |
| Волатильность<br>(σ)   | 2%     | 2%     | 2%     |
| VaR (млн руб.)         | 2,56   | 3,29   | 4,65   |

Детальный анализ полученных результатов демонстрирует строгую нелинейную зависимость между требуемой надежностью модели и величиной резервируемого капитала под риск. Переход от уровня доверия 90% к 95% требует увеличения лимита потерь на 0,73 млн руб. Однако стремление к максимальной защите (99%) сдвигает квантиль глубоко в левый хвост распределения ( $Z = -2,326$ ), что приводит к резкому скачку значения VaR до 4,65 млн руб. Вывод однозначен: чем выше уровень доверия закладывается в модель, тем экспоненциально больше формируется необходимый запас под покрытие рыночного риска.

Однако ограничение VaR заключается в том, что он указывает лишь границу. Для оценки глубины потенциальной просадки рассчитаем метрику CVaR для уровня 95% ( $\alpha = 0,05$ ). Воспользуемся выведенной нами ранее формулой условного математического ожидания. Сначала вычислим значение плотности стандартного нормального распределения  $\phi(Z)$  в точке квантиля – 1,645:

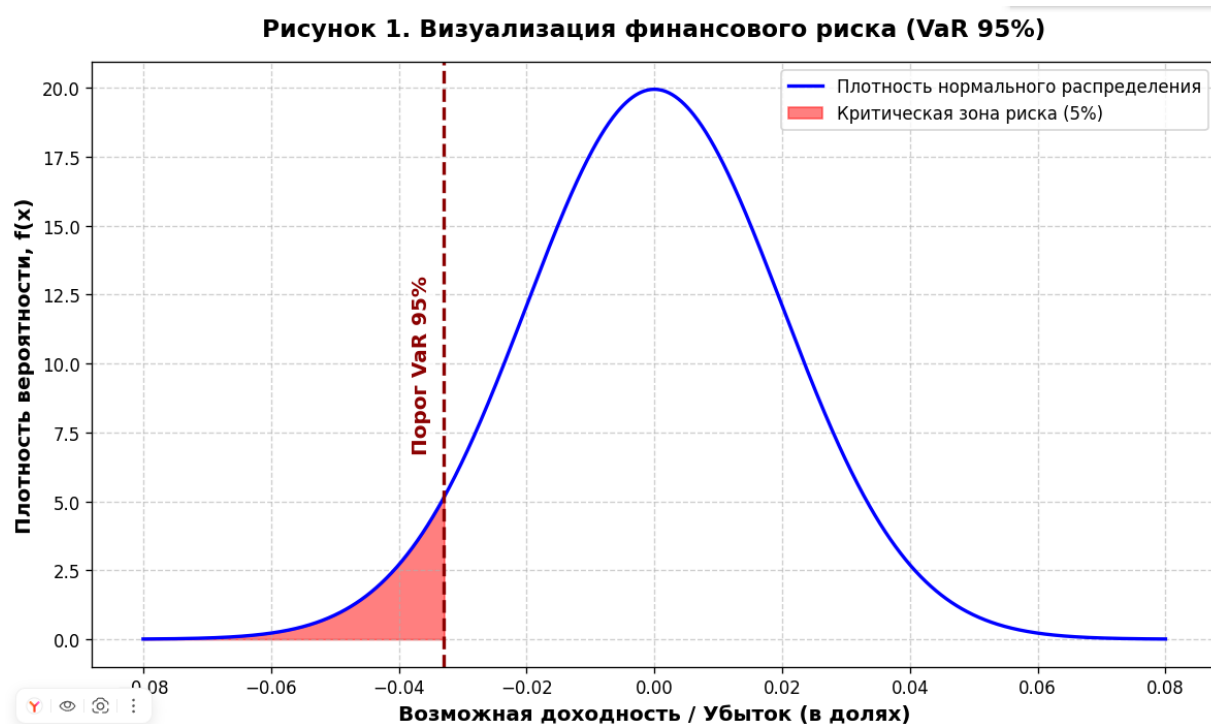
$$\phi(1,645) = (1 / \sqrt{(2\pi)}) \times e^{(-1,645^2 / 2)} \approx 0,3989 \times 0,2584 \approx 0,1031$$

Теперь подставим полученную плотность вероятности в основную формулу CVaR:

$$CVaR = 100 \times (0,1031 / 0,05) \times 0,02 = 100 \times 2,062 \times 0,02 = 4,12 \text{ млн руб.}$$

Сравнительный анализ показывает фундаментальную разницу: граница риска (VaR) составляет 3,29 млн руб., тогда как средний ожидаемый убыток при наступлении кризиса (CVaR) достигает 4,12 млн руб. (разница 25%). Это математически доказывает, что пробитие порога VaR влечет за собой потери, существенно превосходящие сам порог.

Для наглядной интерпретации полученного результата 95-процентного уровня доверия визуализируем кривую плотности нормального распределения доходности (Рисунок 1).



***Рисунок 1. Визуализация финансового риска на основе нормального распределения (VaR 95%)***

*Источник: составлено авторами*

Графическая модель строго структурирована: ось абсцисс отображает возможные значения финансового результата (от убытков в левой части до прибыли в правой), а ось ординат – функцию плотности вероятности наступления соответствующих событий. Ключевым элементом графика является вертикальная пунктирная черта, отсекающая ровно 5% площади под кривой. Эта черта геометрически визуализирует расчетный порог VaR в размере 3,29 млн руб.

Красная закрашенная область левее черты представляет собой зону критического риска. Именно внутри этой площади располагается вычисленный нами «центр тяжести» убытков – метрика CVaR (4,12 млн руб.), которая характеризует среднее значение потерь при реализации наихудших 5% сценариев.

### 3. Эмпирический анализ реальных данных ПАО «Сбербанк» и проблема «толстых хвостов»

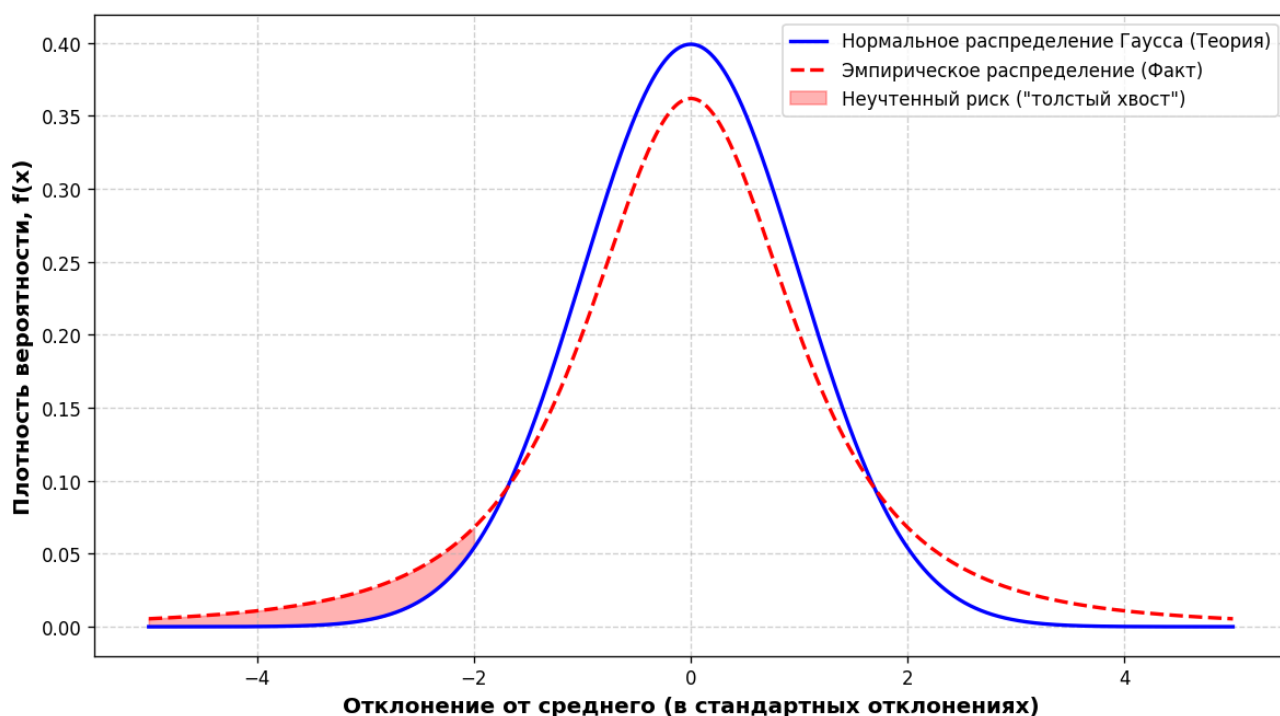
Академические параметрические модели нуждаются в обязательной верификации на реальных рыночных данных. Для этого был проведен ретроспективный анализ дневных котировок обыкновенных акций ПАО «Сбербанк» за период 2024–2025 гг. Расчет фактической исторической волатильности ( $\sigma$ ) по массиву доходностей показал значение 2,8% в день, что превышает наше базовое теоретическое допущение.

Рассчитаем параметрический VaR (95%) для портфеля в 100 млн руб., используя уже реальную историческую волатильность:

$$\text{VaR}_{\text{реал}} = 100 \times (|-1,645| \times 0,028) = 4,60 \text{ млн руб.}$$

Однако при расчете эмпирического квантиля (методом Historical Simulation) по фактическому массиву доходностей Сбербанка за этот же период реальный убыток, отсекающий 5% худших сценариев, составил 5,20 млн руб. Расхождение между обновленным теоретическим риском (4,60) и фактом (5,20) превышает 13%.

Данное отклонение фундаментально объясняется тем, что эмпирическое распределение доходностей обладает избыточным положительным эксцессом ( $\text{kurtosis} > 3$ ). Это явление в математической статистике называется проблемой «толстых хвостов» (fat tails). Схематичное сопоставление идеального нормального распределения и распределения с «толстыми хвостами» представлено на Рисунке 2.



**Рисунок 2. Наложение функции плотности нормального распределения и распределения с избыточным эксцессом**

*Источник: составлено авторами*

Визуализация наглядно демонстрирует, что в реальности экстремальные отклонения (в левом хвосте) имеют значительно большую плотность вероятности, чем предсказывает кривая Гаусса. Площадь под хвостом реального распределения шире, что и приводит к фактическим убыткам в 5,20 млн руб. вместо теоретически ожидаемых. Именно поэтому параметрическую оценку VaR необходимо корректировать путем расчета CVaR, учитывающего условное ожидание внутри этих утолщенных хвостов.

### **Заключение**

В ходе исследования был формализован процесс вероятностной оценки финансовых рисков на основе метрик VaR и CVaR. Анализ доказал, что применение аппарата теории вероятностей в синергии с инструментами визуализации позволяет перевести абстрактный стохастический расчет в понятную плоскость принятия решений. Установлено, что повышение уровня доверия требует нелинейного увеличения резервного капитала под риск.

Для портфеля из акций Сбербанка при 95% доверии базовая теоретическая оценка VaR составила 3,29 млн руб., однако из-за эффекта толстых хвостов реальный риск значительно выше, что требует обязательного учёта метрики CVaR. Комплексный анализ исторической волатильности показал расхождение параметрических ожиданий с эмпирическими данными. Таким образом, эффективный риск-менеджмент должен опираться не только на фиксацию границы риска (VaR), но и на оценку ожидаемых потерь в экстремальных сценариях (CVaR), компенсирующую математические ограничения нормального распределения.

#### **Использованные источники:**

1. Кремер, Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник и практикум для вузов / Н. Ш. Кремер. – 5-е изд., перераб. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2023. – 538 с.
2. Меньшиков, И. С. Финансовый анализ и оценка рисков : математические методы / И. С. Меньшиков. – Москва : Инфра-М, 2021. – 280 с.
3. ПАО «Сбербанк». Финансовая отчётность [Электронный ресурс]. – URL: <https://www.sberbank.com/ru/investor-relations/groupresults/msfo> (дата обращения: 06.05.2026).
4. Московская Биржа. Итоги торгов: ПАО «Сбербанк» [Электронный ресурс]. – URL: <https://www.moex.com> (дата обращения: 07.05.2026).
5. Hu, K. Application of Probability Theory in Data Visualization: Financial Risk Prediction // Advances in Economics and Management Research. – 2025. – Vol. 15. – P. 808–816.