

Зайнуллина А.А.,

студент,

2 курс, Финансовый факультет

«Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»,

Уфимский филиал

Россия, г. Уфа

Научный руководитель: Федотова М.Ю.,

кандидат физико-математических наук, доцент

доцент кафедры «Математика и информатика»

«Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»,

Уфимский филиал

Россия, г. Уфа

ПРИМЕНЕНИЕ НЕРАВЕНСТВА ЧЕБЫШЕВА ДЛЯ ОЦЕНКИ КАССОВОГО РАЗРЫВА

Аннотация: *Статья посвящена применению неравенства Чебышева для оценки вероятности кассового разрыва. В отличие от классических методов, требующих предположения о нормальном распределении отклонений денежного потока, неравенство Чебышева даёт универсальную верхнюю границу риска, справедливую для любого распределения с конечной дисперсией. Рассматривается прямая задача (оценка вероятности разрыва) и обратная (расчёт минимального ликвидного резерва). Предложенный подход обеспечивает консервативную, но робастную оценку риска ликвидности, не зависящую от формы распределения денежных потоков.*

Ключевые слова: *кассовый разрыв, неравенство Чебышева, ликвидный резерв, распределение денежного потока, риск.*

Abstract: *The article is devoted to the application of the Chebyshev inequality for assessing the probability of a cash gap. Unlike classical methods that require the assumption of a normal distribution of cash flow deviations, the Chebyshev inequality provides a universal upper bound for risk that is valid for any distribution with finite variance. The article considers both the forward problem (assessing the probability of a gap) and the inverse problem (calculating the minimum liquid reserve). The proposed approach provides a conservative yet robust assessment of liquidity risk that is independent of the distribution of cash flows.*

Keywords: *cash gap, Chebyshev inequality, liquid reserve, cash flow distribution, risk.*

Введение

Кассовый разрыв – это ситуация, при которой у организации в конкретный момент времени отсутствует достаточный объём денежных средств на расчётных счетах и в кассе для исполнения обязательных платежей [4, с. 84]. К таким платежам относятся: заработная плата, налоговые перечисления, расчёты с поставщиками, кредитные выплаты и другие неотложные расходы.

Важно отличать кассовый разрыв от убыточности. Компания может быть прибыльной по данным бухгалтерского учёта, но испытывать временный недостаток ликвидности из-за несовпадения сроков поступления дебиторской задолженности и наступления сроков оплаты кредиторской задолженности.

Основные причины кассового разрыва [3, 595-596]:

- задержки платежей со стороны покупателей;
- досрочное предъявление требований кредиторами;
- сезонные колебания выручки;
- ошибки в прогнозировании денежных потоков.

Последствия кассового разрыва варьируются от штрафов и пеней до остановки производства, судебных исков и запуска процедуры банкротства.

Поэтому прогнозирование вероятности разрыва является ключевой задачей финансового менеджмента [1, с. 13].

Применение неравенства Чебышева к прогнозу кассового разрыва

Для применения неравенства Чебышева к прогнозу кассового разрыва необходимо определить три параметра.

Первый параметр – средний прогнозный остаток (μ). Это математическое ожидание остатка денежных средств на конец рассматриваемого периода [2, с. 8]. Поскольку истинное математическое ожидание неизвестно, на практике его оценивают двумя способами:

- как среднее арифметическое исторических остатков;
- как среднее арифметическое прогнозных остатков, полученных из бюджета движения денежных средств.

Второй параметр – среднеквадратическое отклонение (σ). Это количественная мера разброса: насколько сильно фактический остаток в среднем отклоняется от μ [2, с. 9]. Среднеквадратическое отклонение (σ) может быть оценено тремя способами:

- по историческому ряду фактических остатков;
- по историческим ошибкам прогноза (разница между прогнозным и фактическим остатком);
- экспертно, например, как половина ожидаемого размаха вариации.

Третий параметр – критический порог (L). Критический порог (L) – это минимально допустимый остаток денежных средств на счёте, ниже которого опускаться нельзя. Это «красная линия» для ликвидности компании: если остаток падает ниже L , возникает кассовый разрыв (или риск его возникновения).

Чаще всего $L = 0$ (абсолютный кассовый разрыв). Самый распространённый вариант. Означает, что любой отрицательный остаток (или нулевой) считается критическим. Используется, если у компании нет резервного фонда или жёсткие требования к наличию средств на счёте.

Но L может быть и положительным, так как может включать:

- сумму неснижаемого страхового резерва (например, 300 000 руб., которые всегда должны быть на счёте);
- объём платежей, которые гарантированно должны быть совершены в ближайший день (зарплаты, аренда, налоги);
- минимальный остаток для поддержания работы платёжной системы или выполнения обязательных операций.

Пример: если в ближайший день нужно оплатить зарплаты (500 000 руб.) и аренду (200 000 руб.), то $L = 700\,000$ руб. – это «безопасная» граница, ниже которой нельзя опускаться.

Ключевое условие: L (критический порог) должно быть меньше μ (средний прогнозный остаток или математическое ожидание). То есть средний запас денег должен быть выше «опасной черты». Если это не так, то компания уже в зоне постоянного риска.

По неравенству Чебышева, для случайной величины $X: \Omega \rightarrow R$, определённой на вероятностном пространстве (Ω, F, P) , с конечным математическим ожиданием μ и конечной дисперсией σ^2 имеет место соотношение:

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2} \text{ [5, с. 29].}$$

Неравенство Чебышева описывает вероятность того, что случайная величина X отклонится от своего математического ожидания (μ) на величину, не меньшую $k\sigma$. Отклонение рассматривается в обе стороны: и вверх ($X > \mu + k\sigma$), и вниз ($X < \mu - k\sigma$).

Нас интересует только одностороннее отклонение вниз: $X \leq L$ (остаток упал ниже порога). Заметим, что если L находится ниже μ , то расстояние от среднего до порога равно $\mu - L$. Событие $X \leq L$ означает, что отклонение X от μ вниз составило не менее $\mu - L$. Это отклонение является частным случаем полного отклонения:

$$P(X \leq L) \leq P(|X - \mu| \geq \mu - L).$$

Это означает, что вероятность того, что случайная величина X (например, остаток на счёте) окажется ниже критического порога L , не превышает вероятность того, что отклонение X от среднего значения μ будет больше или равно разности $(\mu - L)$.

Теперь введём обозначение $k = \frac{\mu - L}{\sigma}$ [5, с. 29]. Это безразмерная величина, показывающая, сколько стандартных отклонений укладывается в расстояние от среднего до критического порога. Подставляя k в неравенство Чебышева, получаем:

$$P(X \leq L) \leq \frac{1}{k^2} = \frac{\sigma^2}{(\mu - L)^2} \quad [5, \text{с. 29}].$$

Итоговая формула позволяет вычислить верхнюю границу вероятности кассового разрыва, зная всего три числа: средний остаток, его стандартное отклонение и критический порог [6, с. 24].

Формула неравенства Чебышёва даёт практически ценную оценку верхней границы вероятности кассового разрыва только при условии $k > 1$, то есть, когда разность между математическим ожиданием (μ) и пороговым значением (L) превышает стандартное отклонение (σ) – $(\mu - L > \sigma)$ [6, с. 24].

Действительно, пусть $k > 1$.

Это единственная ситуация, когда метод даёт содержательную оценку.

Предположим, что $\mu = 500$, $L = 300$, $\sigma = 100$.

Тогда:

$$k = \frac{500 - 300}{100} = 2 > 1,$$
$$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Неравенство Чебышёва утверждает:

$$P(X \leq L) \leq 0,25.$$

Это полезная информация. Компания знает, что даже в самом неблагоприятном случае (при любом распределении) вероятность кассового

разрыва не превышает четверти. Реальный риск может быть ниже, но верхняя граница известна.

Пусть теперь $k = 1$, при $\mu = 500$, $L = 400$, $\sigma = 100$.

Тогда:

$$k = \frac{500 - 400}{100} = 1,$$
$$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} = \frac{1}{1} = 1.$$

Неравенство Чебышёва утверждает:

$$P(X \leq L) \leq 1.$$

Это утверждение всегда верно, поскольку любая вероятность не превышает 1. Однако такая оценка не несёт никакой информации и не помогает в принятии решений.

Вывод: при $k = 1$ метод бесполезен – он не ограничивает риск содержательным числом.

И, наконец, $k < 1$; $\mu = 500$, $L = 450$, $\sigma = 100$.

Тогда:

$$k = \frac{500 - 450}{100} = 0,5 < 1,$$
$$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{0,5^2} = 4.$$

Формально $\frac{1}{k^2} = 4$, но вероятность не может быть больше 1.

Поэтому фактическая оценка:

$$P(X \leq L) \leq 1.$$

Снова получено тривиальное утверждение «не больше 1», которое ничего не говорит о реальном уровне риска.

Вывод: при $k < 1$ метод также бесполезен.

Таким образом, метод работает только тогда, когда средний прогнозный остаток отстоит от критического порога на расстояние, превышающее стандартное отклонение. Иными словами, у компании уже должен быть некоторый минимальный запас прочности. Если это условие не выполняется,

риск кассового разрыва может быть сколь угодно высоким, и неравенство Чебышева не даёт способа его ограничить.

Расчёт необходимого резерва

На практике часто требуется решить обратную задачу: задаться допустимой вероятностью кассового разрыва $P_{\text{доп}}$ (например, компания готова рисковать с вероятностью не более 5%) и определить, каким должен быть минимальный запас $\mu - L$.

Исходим из неравенства:

$$\frac{\sigma^2}{(\mu - L)^2} \leq P_{\text{доп}}.$$

Или, что то же самое:

$$\mu - L \geq \frac{\sigma}{\sqrt{P_{\text{доп}}}}.$$

Таким образом, чтобы гарантировать, что вероятность кассового разрыва не превысит заданного уровня $P_{\text{доп}}$, средний прогнозный остаток должен быть выше критического порога как минимум на $\frac{\sigma}{\sqrt{P_{\text{доп}}}}$.

Рассмотрим полученные результаты с точки зрения пессимистического сценария.

Пессимистический сценарий – это ситуация, когда распределение денежного потока оказывается настолько неблагоприятным, с такими тяжёлыми хвостами, что экстремально низкие остатки становятся гораздо более вероятными, чем предсказывает нормальная модель.

Универсальный характер неравенства Чебышева позволяет получить консервативную оценку рисков, которая остается верной для любых типов распределений [5, с. 39]. Математическое выражение $\frac{\sigma^2}{(\mu - L)^2}$ определяет максимально возможную вероятность того, что остаток опустится ниже критического уровня. Таким образом, при расчете резервов на основе этого метода компания получает математически обоснованный предел риска,

который не будет превышен заданного $P_{доп}$ вне зависимости от реальной формы распределения данных.

Это и есть страховка от пессимистического сценария: метод защищает не от наступления самого сценария (остановить падение выручки он не может), а от недооценки его вероятности. Он заставляет менеджера считаться с тем, что хвосты распределения могут быть тяжёлыми, и требует соответствующего запаса ликвидности.

Заключение

Таким образом, неравенство Чебышева имеет большое практическое значение. Оно является незаменимым инструментом стресс-тестирования, позволяя получить верхнюю границу вероятности кассового разрыва в условиях, когда форма распределения неизвестна [5, с. 39]. Его использование даёт два практических результата: во-первых, конкретную числовую границу для заданного запаса прочности; во-вторых, консервативный норматив резерва для заданного аппетита к риску. Это и есть математически обоснованная страховка от пессимистического сценария.

Список использованной литературы:

1. Алексеев Сергей Юрьевич Анализ современных подходов к управлению денежными потоками компании // Бизнес-образование в экономике знаний. 2019. №3 (14). – С. 13-17.
2. Кулжанов Уткир Нематович, Сайдуллаев Азамат Журакулович, Эшмухамедов Абдулла Ёрмаматович ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ // Проблемы Науки. 2021. №4 (161). – С. 7-9.
3. Маракулина Ю. Н., Газина В. Ю. ПРОБЛЕМА КАССОВЫХ РАЗРЫВОВ ПРИ УПРАВЛЕНИИ ДЕНЕЖНЫМИ ПОТОКАМИ // Экономика и социум. 2015. №6-1 (19). – С. 594-597.
4. Соколов Николай Юрьевич Кассовый разрыв как форма проявления экономической институциональной ловушки // Вестник ОмГУ. Серия: Экономика. 2016. №1. – С. 82-87.

5. Чечулин В. Л., Грацилев В. И. Способ устойчивого оценивания, использующий неравенство Чебышева, и его приложение к анализу доходов в России // Вестник Пермского федерального исследовательского центра. 2015. №2. – С. 24-39.

6. Чечулин Виктор Львович К ОБОСНОВАНИЮ МЕТОДА УСТОЙЧИВОГО ОЦЕНИВАНИЯ ПОСРЕДСТВОМ НЕРАВЕНСТВА ЧЕБЫШЁВА // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2010. №2. – С. 24-29.